

南京理工大学

2021 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 611 科目名称: 数学(单考) 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本题纸或草稿纸上均无效; ③本题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题(每小题 5 分, 共 25 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tan x}{\arcsin x \cdot \ln(1+x)} =$ _____。

2、设 $y = x^2 - x + 5$, 则在 $x = 3$ 处的微分 $dy =$ _____。

3、 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^n}{n}$ 的收敛区间是 _____。

5、设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} - 2A^* \right| =$ _____。

二、选择题(每小题 5 分, 共 25 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \cdot \arctan \frac{1}{x}$ 是 ()

A. 无穷大量; B. 无穷小量; C. 无界量; D. 有界量, 但不是无穷小量

2、函数 $f(x) = |x^3|$ 在原点 ()

A. 不连续; B. 连续, 但不可导; C. 可导但导数不为零; D. 导数为零

3、直线 $L: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $\pi: 4x - 2y - 2z = 3$ 的关系是 ()

A. 平行; B. 垂直相交; C. L 在 π 上; D. 相交但不垂直

4、下列级数中, 发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

5、设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$), 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS$ 的值为 ()

A. $4\pi a^3$ B. $2\pi a^3$ C. $-2\pi a^3$ D. $-4\pi a^3$

三、计算题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 已知 $f(2) = 5, f'(2) = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 2f(x)}{x - 2}$;

(2) 已知 $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$, 试用 A 表示定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(x+1)} dx$ 。

四、(8 分) 设 $z = f(t)$, $t = \phi(xy, x^2 + y^2)$, 其中 f 有二阶连续导数, ϕ 有二阶连续偏导数, 求 z_{xy} 。

五、(10 分) 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 的切线与法平面方程。

六、(12 分) 设可微函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + t^4, \text{ 求 } f(t)。$$

七、(12 分) 设曲面 Σ 为抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 取上侧, 计算

$$\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + 2 dx dy。$$

八、(10 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$ 的通解。

九、(16 分) 当 b 取何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = b - 2 \end{cases}$ 有解? 并在有解

时求其通解。

十、(8 分) 设向量 α 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 线性表示, 则表示法唯一的充要条件是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 线性无关。

十一、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$ 。

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^{\xi} f(x) dx = 0$ 。