南京理工大学

2020 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　　科目名称：数学分析　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)$;

(2) 证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan n$ 不存在.

二、(15 分)

设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0.\\ 0, x^2+y^2=0.\end{cases}$ 问 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数在点 $(0,0)$ 处是否连续？$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？(说明理由)

三、(15 分)

(1) 讨论 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$ 的敛散性；

(2) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

四、(15 分)

设函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续.

(1) 证明 $f+g$ 在 I 上一致连续；

(2) 若 I 为有限区间，证明 $f\bullet g$ 在 I 上一致连续；

(3) 若 I 为无限区间，举例说明 $f\bullet g$ 在 I 上不一定一致连续.

五、(15 分)

设 $f_0(x)$ 为 $[0,1]$ 上的有界可积函数，且函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 满足

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,$$

证明：函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

六、(15 分)

求 $\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}dy$,　其中 L 为由曲线 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=x, y=\sqrt{3}x\ (y>0)$ 所围成的区域边界正向.

七、(15 分) 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[2f(x,y,z)+x]dydz+[f(x,y,z)+y]dzdx+[3f(x,y,z)+z]dxdy,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数，$\sum$ 为平面 $x+y-z=1$ 在第一卦限部分的上侧.

八、(15 分)

设 Ω 为区域 $x^2+y^2+z^2\leq 1$, 求 $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz.$

九、(15 分) 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

十、(15 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\geq 0)$,

判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$ 的敛散性，若级数收敛指出是条件收敛还是绝对收敛.

(2) 证明自然对数的底数 e 是无理数.